CORRECTION MATH II

Partie I

2 1. a) $x \in \mathrm{Ker}(u) \iff \langle u(x), y\rangle = 0,\ \forall y \in E \iff \langle x, u^*(y)\rangle = 0,\ \forall y \in E \iff x \in (\mathrm{Im}\ u^*)^{\perp}$.

2 D'après ce qui précède $\mathrm{Ker}\, u^* = (\mathrm{Im}(u^*)^*)^{\perp} = (\mathrm{Im}\, u)^{\perp}$.

---

2 b) On a $\dim \mathrm{Ker}\ u + \dim \mathrm{Im}\ u = n$ et d'après la première question $\dim \mathrm{Ker}\ u + \dim \mathrm{Im}\ u^* = n$ et $\dim \mathrm{Ker}\ u^* + \dim \mathrm{Im}\ u = n$. Donc $\dim \mathrm{Ker}\ u = \dim \mathrm{Ker}\ u^*$ et que u

2 et u^* ont le même rang.

---

2 2. a) Si $x \in \mathrm{Ker}(u^*)$, alors $uu^*(x) = 0$, donc $\mathrm{Ker}\, u^* \subset \mathrm{Ker}\, uu^*$. Si $x \in \mathrm{Ker}\, uu^*$, alors $\langle uu^*(x), x\rangle = 0 = \langle u^*(x), u^*(x)\rangle = ||u^*(x)||^2$, donc $u^*(x) = 0$.

2 Si $y = uu^*(x)$, avec $x \in E$, alors $y \in \mathrm{Im}\, u$, donc $\mathrm{Im}\, uu^* \subset \mathrm{Im}\, u$. Par ailleurs $\dim \mathrm{Im}\, uu^* = n - \dim \mathrm{Ker}\, uu^* = n - \dim \mathrm{Ker}\, u^* = n - \dim \mathrm{Ker}\ u = \dim \mathrm{Im}\ u$.

---

2 b) $\dim \mathrm{Ker}\ uu^* = \dim \mathrm{Ker}\ u^*$ et $\dim \mathrm{Ker}\ u^*u = \dim \mathrm{Ker}\ u$. Le résultat se déduit de la question 1-b).

---

2 3. Comme u est diagonalisable, la dimension de tout sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre associée.

---

2 4. a) i) On sait que dans un espace euclidien E si F et G sont deux sous-espaces de E, $F^{\perp} + G^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$, donc $(\mathrm{Ker}\, uu^*)^{\perp} + (\mathrm{Ker}\, vv^*)^{\perp} = (\mathrm{Ker}\, uu^* \cap \mathrm{Ker}\, vv^*)^{\perp}$.

---

2 ii) $x \in \ker(uu^* + vv^*) \Rightarrow \langle uu^*(x) + vv^*(x), x\rangle = \langle uu^*(x), x\rangle + \langle vv^*(x), x\rangle = 0 \Rightarrow ||u^*(x)||^2 + ||v^*(x)|^2 = 0 \Rightarrow x \in \underbrace{\mathrm{Ker}\ u^* \cap \mathrm{Ker}\ v^*}_{= \mathrm{Ker}\, uu^* \cap \mathrm{Ker}\, vv^*}$. L'autre inclusion est évidente

---

1 b) Il est évident que $\mathrm{Im}(uu^* + vv^*) \subset \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$ et d'après ce qui précède $\dim \mathrm{Im}(uu^* + vv^*) = n - \dim \mathrm{Ker}(uu^* + vv^*) = n - \dim \mathrm{Ker}\, uu^* \cap \mathrm{Ker}\, vv^* = \dim(\mathrm{Ker}\, uu^* \cap \mathrm{Ker}\, vv^*)^{\perp} = \dim((\mathrm{Ker}\, uu^*)^{\perp} + (\mathrm{Ker}\, vv^*)^{\perp}) = \dim(\mathrm{Im}\, uu^* + \mathrm{Im}\, vv^*)$. $= \dim(\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v)$

+1,5 5. a) $(u^*u)^* = u^*u$ et $(uu^*)^* = uu^*$ et pour tout $x \in E$, $\langle uu^*(x), x\rangle = \langle u^*(x), u^*(x)\rangle \geq 0$ et $\langle u^*u(x), x\rangle = \langle u(x), u(x)\rangle \geq 0$.

---

b) Si $x \neq 0$ est un vecteur propre de uu^* associé à la

3 valeur propre λ, alors $u^*u(u^*(x)) = \lambda u^*(x)$, de plus $u^*(x) \neq 0$ car si $u^*(x) = 0$, alors $\lambda = 0$. Donc λ est une valeur propre commune à uu^* et à u^*u.
Si $x_1, \ldots, x_m$ est une base de $\mathrm{Ker}(uu^* - \lambda\,\mathrm{Id})$, alors $u^*(x_1), \ldots, u^*(x_m)$ est un système libre de $\mathrm{Ker}(u^*u - \lambda\,\mathrm{Id})$. Il en résulte que $\dim \mathrm{Ker}(u^*u - \lambda\,\mathrm{Id}) \geq m$ et par symétrie $\dim \mathrm{Ker}(u^*u - \lambda\,\mathrm{Id}) = m$.

Partie II

1,5 1. a) $\Rightarrow$ b). Soit λ une valeur propre de u et x un vecteur propre non nul associé à λ. $\langle u(x), x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle$. Comme $x \neq 0$ et $\langle u(x), x\rangle \geq 0$, alors $\lambda \geq 0$.

1,5 b) $\Rightarrow$ c). Comme u est symétrique, il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de u. $u(e_j) = \lambda_j e_j$, avec $\lambda_j \geq 0$. On pose w l'endomorphisme de E défini par $w(e_j) = \sqrt{\lambda_j} e_j$. w est diagonalisable dans une base orthonormée, donc w est symétrique. Soit $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ un vecteur de E.

$$\langle w(x), x\rangle = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\lambda_j}\, x_j^2 \geq 0.$$

Donc w est positif.

1,5 c) $\Rightarrow$ a). Soit $x \in E$. $\langle u(x), x\rangle = \langle w^2(x), x\rangle = \langle w(x), w(x)\rangle \geq 0$, donc u est positif.

1+1 2. a) Il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de u. $(u(e_j) = \lambda_j e_j)$. Soit $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ un vecteur de E. $\langle u(x), x\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2$. Comme les $\lambda_j \geq 0$ et $x_j^2 \geq 0$, alors $[\langle u(x), x\rangle = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = u(x) = 0]$. Il est évident que si $u(x) = 0$, $\langle u(x), x\rangle = 0$.

---

1 b) Si u est inversible, alors $\mathrm{Ker}\, u = \{0\} = \{x \in E;\ \langle u(x), x\rangle = 0\}$. Donc $\langle u(x), x\rangle > 0$, pour $x \in E \setminus \{0\}$.

1 Réciproquement si $\langle u(x), x\rangle > 0$, pour $x \in E \setminus \{0\}$, alors $\mathrm{Ker}\, u = \{0\}$. Donc u est injectif, donc bijectif.

1+1 3. a) $(v^*uv)^* = v^*uv$, donc v^*uv est symétrique. Soit $x \in E$, $\langle v^*uv(x), x\rangle = \langle u(v(x)), v(x)\rangle \geq 0$. Donc v^*uv est positif.

---

2 b) u est symétrique positif et inversible, donc il existe $w \in \mathcal{S}^+(E)$ inversible tel que $u = w^2$. Donc $uv = w(wvw)w^{-1}$. Donc uv est semblable à l'endomorphisme wvw qui est

w est inversible car $0 \neq \det u = (\det w)^2 \Rightarrow \det w \neq 0$

symétrique d'après ce qui précède, donc il est diagonalisable dans une base orthonormée. Il en résulte que uv est diagonalisable. (pas nécessairement dans une base orthonormée).

---

2 c) i) Les valeurs propres de uv sont les même que pour l'endomorphisme wvw qui sont positives.

1-1 ii) D'après ce qui précède, uv injectif ssi wvw est injectif, ce qui est équivalent au fait que v est injectif, car w est inversible.

---

iii) $u^{-1}v$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont positives. Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont les valeurs propres de $u^{-1}v$, alors $(1+\lambda_1, \dots, 1+\lambda_n)$ sont les valeurs propres de $(\mathrm{Id} + u^{-1}v)$.

-2 Donc $\det(\mathrm{Id} + u^{-1}v) = \prod_{j=1}^{n}(1+\lambda_j) \geq 1$.

$\det(u+v) = \det u \det(\mathrm{Id} + u^{-1}v) \geq \det u$.

-1 iv) f est la composée de l'application affine $t \longmapsto u + tv$ de $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$ et de l'application det qui est continue sur $\mathcal{L}(E)$. Si $0 \leq s \leq t < +\infty$, alors $\det(u+tv) = \det[(u+sv) + (t-s)v] \geq \det(u+sv)$, d'après ce qui précède.

Partie III

1,5

1,5 1. $u \preceq v \iff v - u$ est positif, ce qui est par définition équivalent au fait que pour tout $x \in E$, $\langle (v-u)(x), x\rangle \geq 0 \iff \langle u(x), x\rangle \leq \langle v(x), x\rangle$.

---

2. a) Soit $u, v, w \in \mathcal{S}^+(E)$. On a $u - u = 0 \in \mathcal{S}^+(E)$, donc la relation $\preceq$ est réflexive. Si $u \preceq v$ et $v \preceq u$, alors les valeurs propres de $u - v$ sont nulles et comme c'est un endomorphisme diagonalisable, il est nul, donc la relation $\preceq$ est antisymétrique. Si $u \preceq v$ et $v \preceq w$, alors pour tout $x \in E$, $\langle (w-u)(x), x\rangle = \langle (w-v)(x), x\rangle + \langle (v-u)(x), x\rangle \geq 0$. Donc la relation $\preceq$ est transitive et donc elle est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}^+(E)$.

---

b) La relation $\preceq$ n'est pas totale. u et v sont positifs, $u - v \in \mathcal{S}(E)$, mais ni $u - v$ ni $v - u$ n'est positif. En effet les valeurs propres de $u - v$ sont 1 et -1.

---

3. Il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de u. ($u(e_j) = \lambda_j e_j$). Donc $(\alpha\,\mathrm{Id} - u)(e_j) = (\alpha - \lambda_j)e_j$ pour tout j et $\alpha - \lambda_j \geq 0$. Donc $\alpha\,\mathrm{Id} - u \in \mathcal{S}^+(E)$.

---

4. a) Comme $\langle u(x), x\rangle \leq \langle v(x), x\rangle$, donc $\mathrm{Ker}\, v \subset \mathrm{Ker}\, u$ et d'après I-1) $(\mathrm{Im}\, v)^{\perp} \subset (\mathrm{Im}\, u)^{\perp} \iff \mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Im}\, v$.

1,5+1,5

2

b) Si u est inversible, $\operatorname{Ker} u = \{0\} \Rightarrow \operatorname{Ker} v = \{0\} \Rightarrow v$ est inversible. Ou encore d'après la question II-3)iii) $\det v = \det((v-u)+u) \geq \det u > 0$.

2

5. $a) \Rightarrow b)$. D'après III-4)-a) $uu^* \preceq \lambda vv^* \Rightarrow \operatorname{Im} uu^* \subset \operatorname{Im} vv^*$. Comme $\operatorname{Im} uu^* = \operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Im} vv^* = \operatorname{Im} v$. Donc $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} v$.

2

$b) \Rightarrow c)$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, comme $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} v$, pour tout $1 \leq j \leq n$, il existe $x_j \in E$ tel que $v(x_j) = u(e_j)$. Le vecteur x_j n'est pas nécessairement unique. On pose $w(e_j) = x_j$ pout tout j, avec $w \in \mathcal{L}(E)$. Alors $u = v \circ w$.

2

$c) \Rightarrow a)$. Si λ est la plus grande valeur propre de ww^*, alors $(\lambda \operatorname{Id} - ww^*) \in \mathcal{S}^+(E)$. $uu^* = vww^*v^* = \lambda vv^* - v(\lambda \operatorname{Id} - ww^*)v^*$. Comme $v(\lambda \operatorname{Id} - ww^*)v^*$ est dans $\mathcal{S}^+(E)$, donc $uu^* \preceq \lambda vv^*$.

---

2 + 2

6. a) i) L'application $\varphi_1(x) = \langle y, x\rangle$ est linéaire, donc différentiable $d\varphi_1(x)h = \langle y, h\rangle$. L'application $\varphi_2(x) = \langle u(x), x\rangle$ est différentiable et $d\varphi_2(x)h = \langle u(x), h\rangle + \langle u(h), x\rangle = 2\langle u(x), h\rangle$, car u est symétrique. Donc φ est différentiable sur E et $d\varphi(x)h = 2\langle y - u(x), h\rangle$.

1

ii) Le seul point critique c'est le point x_0 tel que $u(x_0) = y$, car u est injective.

2

b) $\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = 2\langle u(x_0), x_0\rangle + 2\langle u(x_0), h\rangle - \langle u(x_0), x_0\rangle - \langle u(x_0), h\rangle - \langle u(h), x_0\rangle - \langle u(h), h\rangle - 2\langle u(x_0), x_0\rangle + \langle u(x_0), x_0\rangle = -\langle u(h), h\rangle \leq 0$.

1,5 + 2

c) Comme $u \preceq v$, donc $\varphi \geq \psi$. Il en résulte que le maximum de φ est plus grand que le maximum de ψ soit $\varphi(u^{-1}(y)) \geq \psi(v^{-1}(y))$, pour tout $y \in E$. Comme $\varphi(u^{-1}(y)) = 2\langle y, u^{-1}(y)\rangle - ||y||^2$ et $\psi(u^{-1}(y)) = 2\langle y, v^{-1}(y)\rangle - ||y||^2$, il en résulte que

$$\langle y, v^{-1}(y)\rangle \leq \langle y, u^{-1}(y)\rangle, \quad \forall y \in E$$

Donc $v^{-1} \preceq u^{-1}$.

Partie IV

On note $C^\infty(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et soit E_n le sous espace de $C^\infty(\mathbb{R})$ formé des fonctions de la forme $f(t) = e^{-t^2/2}P(t)$, avec P un polynôme de degré au plus n. On muni E_n du produit scalaire $(f/g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt$. Pour $f \in E_n$, on pose $u(f)(t) = -f''(t) + t^2 f(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Soit $f \in E_n$, $f(t) = e^{-t^2/2}P(t)$, avec P un polynôme de degré au plus n.

$1{,}5$: $u(f) \in E_n$

$1{,}5$: u linéaire

$f'(t) = -te^{-t^2/2}P(t) + e^{-t^2/2}P'(t)$ et $f''(t) = -e^{-t^2/2}P(t) + t^2e^{-t^2/2}P(t) - 2te^{-t^2/2}P'(t) + e^{-t^2/2}P''(t)$. Donc $u(f)(t) = -(1+t^2)e^{-t^2/2}P(t) + 2te^{-t^2/2}P'(t) + e^{-t^2/2}P''(t) + t^2e^{-t^2/2}P(t) = e^{-t^2/2}(P(t) + 2tP'(t) - P''(t))$. Il en résulte que u est un endomorphisme de E_n.

2

2. a) Si $f, g \in E_n$,

$$(u(f)/g) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)g(t)dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)g(t)dt$$

On fait une intégration par parties on aura:

$$(3) \qquad (u(f)/g) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)g(t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)g'(t)dt$$

$1{,}5 + 1 + 1$

b) L'identité (3) montre que u est un automorphisme symétrique et positif.

2

3. a) Soit λ une valeur propre de u associé au vecteur propre f de la forme $f(t) = e^{-t^2/2}P_k(t)$, avec P_k un polynôme de degré k, alors $-f''(t) + (t^2 - k)f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
$-f''(t) + (t^2 - \lambda)f(t) = e^{-t^2/2}(-(\lambda - 1)P(t) + 2tP'(t) - P''(t))$. Le coefficient de plus haut degré est $(2k + (1-\lambda))a_k$, avec a_k le coefficient de t^k dans P. Il résulte que $\lambda = 2k + 1$.

2

b) D'après ce qui précède si $f = e^{-t^2/2}P$ est un vecteur propre de $2k+1$, alors nécessairement le degré de P est k. Si $f = e^{-t^2/2}P$ et $g = e^{-t^2/2}Q$ sont deux vecteurs propres associés à la valeur propre $2k+1$, avec P et Q deux polynômes unitaires, alors $f - g$ est encore un vecteur propre pour la valeur propre $2k+1$. Comme $P - Q$ est degré au plus $k-1$, donc $P = Q$ et donc $f = g$. Il en résulte que le sous-espace propre associé à la valeur propre $2k+1$ est de dimension 1.

2

c) Comme u est diagonalisable et les sous-espaces propres sont de dimension 1, alors les seules valeurs propres sont $\{2k+1;\ 0 \leq k \leq n\}$.

$1 + 1 + 1$

4. Les vecteurs $g_0(t) = e^{-t^2/2}, g_1(t) = te^{-t^2/2}$ et $g_2(t) = (\frac{-1}{2} + t^2)e^{-t^2/2}$ sont des vecteurs propres de u associé respectivement aux valeurs propres 1, 3 et 5. Ces vecteurs sont orthogonaux car ils sont associés à des valeurs propres différentes. $||g_0|| = \pi^{1/4}$, $||g_1|| = \frac{\pi^{1/4}}{\sqrt{2}}$, $||g_2|| = \frac{\pi^{1/4}}{\sqrt{2}}$. On prend $f_0 = \dfrac{g_0}{||g_0||}$, $f_1 = \dfrac{g_1}{||g_1||}$, $f_2 = \dfrac{g_2}{||g_2||}$.